区間ベイズ手法と逐次抜き取り問題について (不確実・不確定環境下における数理的意思決定とその周辺)

堀口, 正之

数理解析研究所講究録
第 1802 巻 2012 年 85-91

区間ベイズ手法と逐次抜き取り問題について (Interval Bayesian method and sequential sampling problem)

神奈川大学・工学部　堀口　正之 (Masayuki HORIGUCHI)
Faculty of Engineering, Kanagawa University

1　はじめに

我々は, これまで, 推移確率行列が未知のマルコフ決定過程 (Uncertain Markov Decision Processes) について, その行列を事前測度区間による区間ベイズ法 (De Robertis and Hartigan 1981[1]) の考え方で各成分が閉区間で表現される推移行列をもつ区間ベイズ MDPs(Interval Bayesian estimated MDPs) を構成した ([6]). 本報告では, この構成法のアイデアを用いて, 逐次抜き取り検査問題 (Wald 1950[15], White 1969[16], Sakaguchi 1970[11]) をもとに区間ベイズ法による期待損失の区間表現 (上限値, 下限値) に関して考察する.

2　記号と準備

以下のような逐次抜き取り検査問題を考える ([15]). 非常に多量な同製品のまとまり (製品群) からのサンプリングで, 一回での一つの製品の抜き取りから不良品 (defective item) であるか良品 (non-defective item) であるかを観測する. 一回あたりの検査費用を c で表す. ここでの目的は, 不良品を含む製品群の出荷を回避し, また, 良品を含む製品群を検査によって不良品と判断することを回避することである. そこで, 製品群の不良率 p に対して, 損失関数 $a(p), r(p)$ をそれぞれ以下のように定義する:
未知の不良率 $p \in (0,1)$ があり,

$$\begin{cases} a(p)\text{: 不良率 } p \text{ の製品群を accept する時の損失} \\ r(p)\text{: 不良率 } p \text{ の製品群を reject する時の損失} \end{cases}$$

とする ($p \cong 0$ なら $a(p)=0$, $p \cong 1$ なら $r(p)=0$ とする. 一般には下に有界であれば良い).

抜き取り検査問題としては, 母不良率 p の検定として検出力に対するサンプルサイズの決定問題も一つの手法といえるが, ここでは不良率 p は非常に小さな値も取りえると考えて逐次抜き取りによる検査費用とリスク評価での停止問題を考える.

今, $G_0(p)$ を不良率 p の事前分布, 観測度数 N において m 個の不良品と $n=N-m$ 個の良品を観測しているとする. m は二項分布に従うから, このときの p の事後分布 $G_{m,n}(p)$ は次の (2.1) のようになる.

記号の説明:

c : 一回当たりの検査費用,

$G_0(p)$: 不良率 p の事前分布,

$\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$: N 個の観測値,

$$dG_{m,n}(p) = \frac{p^m(1-p)^n\, dG_0(p)}{\int_0^1 p^m(1-p)^n\, dG_0(p)}. \tag{2.1}$$

$v(m,n)$ は, これまでの N 回の検査で m 個の不良品と n 個の良品であったという結果のもとで p の確率分布が $G_{m,n}(p)$ であり以後は最適政策を用いて得られる期待損失を表すとする. このとき, 簡単に (m,n) が十分統計量であることがわかり, 次の関数方程式が得られる.

(2.2)

$$\begin{aligned} v(m,n) &= \min \begin{cases} \text{Stop(Accept)}: & \int_0^1 a(p)\, dG_{m,n}(p), \\ \text{Stop(Reject)}: & \int_0^1 r(p)\, dG_{m,n}(p), \\ \text{Continue}: & c + \int_0^1 (pv(m+1,n) + (1-p)v(m,n+1))\, dG_{m,n}(p) \end{cases} \\ &= \min\left\{\psi(m,n), c + b_{m,n}v(m+1,n) + (1-b_{m,n})v(m,n+1)\right\}. \end{aligned}$$

ただし, $\psi(m,n) = \min\left\{\int_0^1 a(p)\, dG_{m,n}(p), \int_0^1 r(p)\, dG_{m,n}(p)\right\}$, $b_{m,n} = \int_0^1 p\, dG_{m,n}(p)$ であるとする.

以下の定理が成り立つことが知られている ([16]).

Theorem 2.1. 次の二つの条件

(i) $\psi(m,n) \geqq 0$ *for all* $m, n = 0, 1, 2, \ldots,$

(ii) $\psi(m,n) \to 0$ *as* $m + n \to \infty$

が成り立つならば, $v(m,n)$ *は関数方程式 (2.2) の唯一の解である.*

この Theorem 2.1 の解 $v(m,n)$ は, Bellman's succesive approximation method によって求められる.

3 期待損失の上限値と下限値

ここで, 事前分布を事前測度区間 $I(L,U)$ に置き換えた場合を考える (cf. [6]). 簡単のため, $I(L,U) = [L, kL]$ であって, L は $[0,1]$ 上のルベーグ測度であるとする.

損失関数 (loss function) を

$$l(d,p) = \begin{cases} a(p) & (d = d_1) \\ r(p) & (d = d_2) \end{cases}$$

とするときの, $Q \in I(L,U)$ に関するベイズリスクを $\beta(\ell, Q)$ として次のように定める:

$$\beta(\ell, Q) = \min_d \left\{\frac{Q(l(d,p))}{Q(1)}\right\} = \min\left\{\frac{Q(l(d_1,p))}{Q(1)}, \frac{Q(l(d_2,p))}{Q(1)}\right\}. \tag{3.1}$$

ただし, 測度 $Q \in I(L,U)$ と可測関数 g に対して $Q(g) = \int g(p)\,dQ(p)$ と表すことにする. このとき, ベイズリスク (3.1) の区間表現は, $-\infty < \lambda < \infty$ に対して次の方程式の解 λ_1, λ_2 として得られる.

Theorem 3.1. *([1])*

(i) $\min\{\beta(l,\theta)|Q \in I(L,U)\}$ の下限値 λ_1 は次の方程式の唯一の解である:

$$\min_d \left\{U(\ell(d,p)-\lambda)^- + L(\ell(d,p)-\lambda)^+\right\} = 0. \tag{3.2}$$

(ii) $\min\{\beta(l,\theta)|Q \in I(L,U)\}$ の上限値は次の方程式の唯一の解 λ_2 を超えない:

$$\min_d \left\{L(\ell(d,p)-\lambda)^- + U(\ell(d,p)-\lambda)^+\right\} = 0. \tag{3.3}$$

ただし, $x^+ = \max\{0,x\}, x^- = x - x^+ = \min\{0,x\}$ とする.

ここで, 事前測度を $G_0(\cdot) \in I(L,U) = [dp, k\,dp]$ とし, そのときの事後区間測度 $G_{m,n}(\cdot) \in I(L_{m,n}, U_{m,n})$ に関して Theorem 3.1 を式 (2.2) で与えられている $\psi(m,n)$ に適用すると, $G_{m,n}(\cdot)$ に関する期待損失 (ベイズリスク) の区間表現 $[\underline{\psi}(m,n), \overline{\psi}(m,n)]$ を得る. さらに, 区間推定マルコフ決定過程 (interval estimated MDPs(Horiguchi(*preprint*))) の結果から, $b_{m,n}$ についても区間表現 $[\underline{b}_{m,n}, \overline{b}_{m,n}]$ が以下の方程式の解 $\underline{\lambda}, \overline{\lambda}$ として得られる:

$$\underline{\lambda} = \frac{Be(m+2,n+1)+(k-1)Be(m+2,n+1,\underline{\lambda})}{Be(m+1,n+1)+(k-1)Be(m+1,n+1,\underline{\lambda})}, \tag{3.4}$$

$$\overline{\lambda} = \frac{kBe(m+2,n+1)-(k-1)Be(m+2,n+1,\overline{\lambda})}{Be(m+1,n+1)-(k-1)Be(m+1,n+1,\overline{\lambda})}, \tag{3.5}$$

ただし, $Be(m+1,n+1) = \int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt, Be(m+1,n+1,x) = \int_0^x t^m(1-t)^n\,dt$ である.

m,n	0	1	2	3
0	$[0.4142, 0.5858]$	$[0.2679, 0.4039]$	$[0.1984, 0.3075]$	$[0.1576, 0.2481]$
1	$[0.5961, 0.7321]$	$[0.4354, 0.5646]$	$[0.3438, 0.4582]$	$[0.2842, 0.3852]$
2	$[0.6925, 0.8016]$	$[0.5418, 0.6562]$	$[0.4461, 0.5539]$	$[0.3794, 0.4787]$
3	$[0.7519, 0.8424]$	$[0.6148, 0.7158]$	$[0.5213, 0.6206]$	$[0.4528, 0.5472]$

Table 3.1: $b_{m,n}$ の区間のいくつかの具体例 ($k=2$ の場合)

Proposition 3.1. $\tilde{b}_{m,n} \in [\underline{b}_{m,n}, \overline{b}_{m,n}]$ について, 次が成り立つ:

(1) *If* $\overline{v}(m+1,n) > \overline{v}(m,n+1)$,
$$\max_{\tilde{b}_{m,n}}\{\tilde{b}_{m,n}\overline{v}(m+1,n)+(1-\tilde{b}_{m,n})\overline{v}(m,n+1)\} = \overline{b}_{m,n}\overline{v}(m+1,n)+(1-\overline{b}_{m,n})\overline{v}(m,n+1).$$

(2) *If* $\overline{v}(m,n+1) > \overline{v}(m+1,n)$,
$\max_{\tilde{b}_{m,n}}\{\tilde{b}_{m,n}\overline{v}(m+1,n)+(1-\tilde{b}_{m,n})\overline{v}(m,n+1)\} = \underline{b}_{m,n}\overline{v}(m+1,n)+(1-\underline{b}_{m,n})\overline{v}(m,n+1)$.

(3) *If* $\underline{v}(m+1,n) > \underline{v}(m,n+1)$,
$\min_{\tilde{b}_{m,n}}\{\tilde{b}_{m,n}\underline{v}(m+1,n)+(1-\tilde{b}_{m,n})\underline{v}(m,n+1)\} = \underline{b}_{m,n}\underline{v}(m+1,n)+(1-\underline{b}_{m,n})\underline{v}(m,n+1)$.

(4) *If* $\underline{v}(m,n+1) > \underline{v}(m+1,n)$,
$\min_{\tilde{b}_{m,n}}\{\tilde{b}_{m,n}\underline{v}(m+1,n)+(1-\tilde{b}_{m,n})\underline{v}(m,n+1)\} = \overline{b}_{m,n}\underline{v}(m+1,n)+(1-\overline{b}_{m,n})\underline{v}(m,n+1)$.

この命題から, 次を得る.

Theorem 3.2. 区間表現 $[\underline{v}(m,n),\overline{v}(m,n)]$ の各端点について次が成り立つ:

(1) $\overline{v}(m,n) = \min\{$*Stop:* $\overline{\psi}(m,n)$, *Continue:* $\max\{c+\overline{b}_{m,n}\overline{v}(m+1,n)+(1-\overline{b}_{m,n})\overline{v}(m,n+1), c+\underline{b}_{m,n}\overline{v}(m+1,n)+(1-\underline{b}_{m,n})\overline{v}(m,n+1)\}\}$.

(2) $\underline{v}(m,n) = \min\{$*Stop:* $\underline{\psi}(m,n)$, *Continue:* $\min\{c+\underline{b}_{m,n}\underline{v}(m+1,n)+(1-\underline{b}_{m,n})\underline{v}(m,n+1), c+\overline{b}_{m,n}\underline{v}(m+1,n)+(1-\overline{b}_{m,n})\underline{v}(m,n+1)\}\}$.

(3) $\underline{v}(m,n),\overline{v}(m,n)$ のそれぞれに対する最適政策は, それぞれの関数方程式を満たす決定政策である.

4 具体的な例題

ここでは, [11] の例題に沿って次のように条件設定をして, 区間ベイズ推定を適用した場合の数値例を考えてみる. 損失関数 $a(p), b(p)$ を

$$a(p) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq p \leqq \frac{3}{4} \\ 1, & \frac{3}{4} < p \leqq 1 \end{cases}$$

$$r(p) = \begin{cases} 1, & 0 \leqq p \leqq \frac{1}{4} \\ 0, & \frac{1}{4} < p \leqq 1 \end{cases}$$

とし, $G_0(p) = p$(一様), $I(L,U) = [L, kL] = [dp, k\,dp]$, $c = 0.04$ とする.

はじめに, ベイズリスクの区間表現 $[\lambda_1, \lambda_2]$ に関して, その下限値と上限値を求める. Lower Bayes risk(λ_1) に関しては, まず d_1 と d_2 のそれぞれについて期待損失に関する解を求めておく.
$d = d_1$ の場合

$$k\int_0^1 (a(p)-\lambda)^- p^m(1-p)^n\,dp + \int_0^1 (a(p)-\lambda)^+ p^m(1-p)^n\,dp = 0.$$

を解いて,

$$\lambda_1^{d_1} = \frac{1 - Be(m+1,n+1,\frac{3}{4})}{1 + kB(m+1,n+1,\frac{3}{4}) - Be(m+1,n+1,\frac{3}{4})}.$$

同様にして, $d = d_2$ の場合

$$\lambda_1^{d_2} = \frac{1 - Be(m+1, n+1, \frac{1}{4})}{k(1 - Be(m+1, n+1, \frac{1}{4})) + Be(m+1, n+1, \frac{1}{4})}$$

を得る.

さらに Upper Bayes Risk (λ_2) に関しても, d_1, d_2 のそれぞれの場合で

$$\lambda_2^{d_1} = \frac{k(1 - Be(m+1, n+1, \frac{3}{4}))}{Be(m+1, n+1, \frac{3}{4}) + k(1 - Be(m+1, n+1, \frac{3}{4}))},$$

$$\lambda_2^{d_2} = \frac{kB(m+1, n+1, \frac{1}{4})}{1 + (k-1)Be(m+1, n+1, \frac{1}{4})}$$

を得る.

従って, $\lambda_1 = \min\{\lambda_1^{d_1}, \lambda_1^{d_2}\}$ と $\lambda_2 = \min\{\lambda_2^{d_1}, \lambda_2^{d_2}\}$ とからベイズリスクの下限値と上限値をそれぞれ具体的に求めることができる. また, 最適政策の期待損失に関する区間表現 $[\underline{v}(m,n), \overline{v}(m,n)]$ も Theorem 3.2 によって求めることができる. それぞれの数値計算結果の一部を以下にまとめておく.

$k = 2$, Lower bound(λ_1) について (Table 4.1):

m, n	0	1	2	3	4
0	<u>.1428</u>				
1	.0323	<u>.0847</u>			
2	.0079	.0261	<u>.0546</u>		
3	.0020	.0079	.0191	.0365	
4	.0005	.0023	.0065	.0138	.0250

Table 4.1: $k = 2$, Lower bound(λ_1)

$k = 2$, Upper bound(λ_2) について (Table 4.2):

m, n	0	1	2	3	4
0	<u>.4000</u>	<u>.1176</u>			
1	<u>.1176</u>	<u>.2702</u>	<u>.0967</u>		
2	.0308	<u>.0967</u>	<u>.1876</u>	<u>.0725</u>	
3	.0078	.0308	<u>.0725</u>	<u>.1318</u>	<u>.0513</u>
4	.0020	.0092	.0254	<u>.0513</u>	<u>.0933</u>

Table 4.2: $k = 2$, Upper bound(λ_2)

$k=2$, $v(m,n)$ の下限値 $\underline{v}(m,n)$(Table 4.3):

m,n	0	1	2	3	4
0	<u>.0723</u>				
1	.0323	<u>.0661</u>			
2	.0079	.0261	.0546		
3	.0020	.0079	.0191	.0365	
4	.0005	.0023	.0065	.0138	.0250

Table 4.3: $K=2$, $\underline{v}(m,n)$

$k=2$, $v(m,n)$ の上限値 $\overline{v}(m,n)$(Table 4.4):

m,n	0	1	2	3	4
0	<u>.1536</u>	<u>.1136</u>			
1	<u>.1136</u>	<u>.1367</u>			
2	.0308	.0967	<u>.1125</u>		
3	.0078	.0308	.0725	<u>.0913</u>	
4	.0020	.0092	.0254	.0513	.0787

Table 4.4: $k=2, \overline{v}(m,n)$

ここで, それぞれの表 (Table 4.1 〜 Table 4.4) について m,n に関する計算結果の対称性から, おもに表内の対角部分に関して対称な数値結果のみを表している. また, λ_1,λ_2 に関しての表 (Table 4.1,4.2) で, 下線を引いている数値は, 検査費用 c よりも大きな値の部分, 従って, 下線が引かれていない (m,n) の領域では "Stop" (accept/reject) を選択すべき領域であることを意味する. 下線が引かれている (m,n) の領域では, さらに $v(m,n)$ に関する区間表現の表 (Table 4.3,4.4) から, それぞれの表を見比べて $\underline{v}(m,n),\overline{v}(m,n)$ のそれぞれの場合での minimizer を与える決定 (decision) が最適政策となる. Table 4.3,4.4 においては, それぞれの評価基準 $(\underline{v}(m,n),\overline{v}(m,n))$ で, 下線が引かれている部分では "Continue", それ以外の部分では "Stop(accept/reject)" を選択することが, 期待損失を最小にする意味で最適であることを示している.

References

[1] L. De Robertis and J. A. Hartigan. Bayesian inference using intervals of measures. *Ann. Statist.*, 9(2):235–244, 1981.

[2] M. H. DeGroot. *Optimal Statistical Decisions.* Wiley Classics Library, reprint of the 1970 original, John Wiley & Sons, 2004.

[3] D. J. Hartfiel. *Markov set-chains*, volume 1695 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[4] M. Horiguchi. Examples for Bayesian approach to uncertain MDPs, **URL** http://www.math.kanagawa-u.ac.jp/~horiguchi/

[5] M. Horiguchi. An interval Bayesian method for uncertain Markov decision processes, (preptrint)

[6] 伊喜哲一郎, 堀口正之, 安田正實, 蔵野正美. 不確実性の下でのマルコフ決定過程に対する区間ベイズ手法 (An interval bayesian method for uncertain MDPs), *RIMS* 講究録 *1636*「不確実性と意思決定の数理」, p.1-p.8, 2009/04.

[7] M. Kurano, J. Song, M. Hosaka, and Y. Huang. Controlled Markov set-chains with discounting. *J. Appl. Probab.*, 35(2):293–302, 1998.

[8] M. Kurano, M. Yasuda, and J. Nakagami. Interval methods for uncertain Markov decision processes. In *Markov processes and controlled Markov chains (Changsha, 1999)*, pages 223–232. Kluwer, 2002.

[9] J. J. Martin. *Bayesian decision problems and Markov chains.* Publications in Operations Research, No. 13. John Wiley & Sons Inc., 1967.

[10] M. L. Puterman. *Markov decision processes: discrete stochastic dynamic programming.* John Wiley & Sons Inc., 1994.

[11] 坂口実. 経済分析と動的計画. 東洋経済新報社, 1970.

[12] K. M. van Hee. *Bayesian control of Markov chains*, volume 95 of *Mathematical Centre Tracts.* Mathematisch Centrum, 1978.

[13] G. B. Wetherill. Bayesian sequential analysis. *Biometrika*, 48(3):281–292, 1961.

[14] S. S. Wilks. *Mathematical statistics.* A Wiley Publication in Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., 1962. 田中英之，岩本誠一（訳），「数理統計学・増訂新版 1,2」，1971,1972年，東京図書.

[15] A. Wald. *Statistical Decision Functions.* John Wiley & Sons Inc., New York, N. Y., 1950.

[16] D. J. White. *Dynamic programming.* Oliver & Boyd, Edinburgh-London, 1969. Mathematical Economic Texts, 1.